

RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ
Éléments de solution de l'épreuve finale de 2012

Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.

Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.

La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

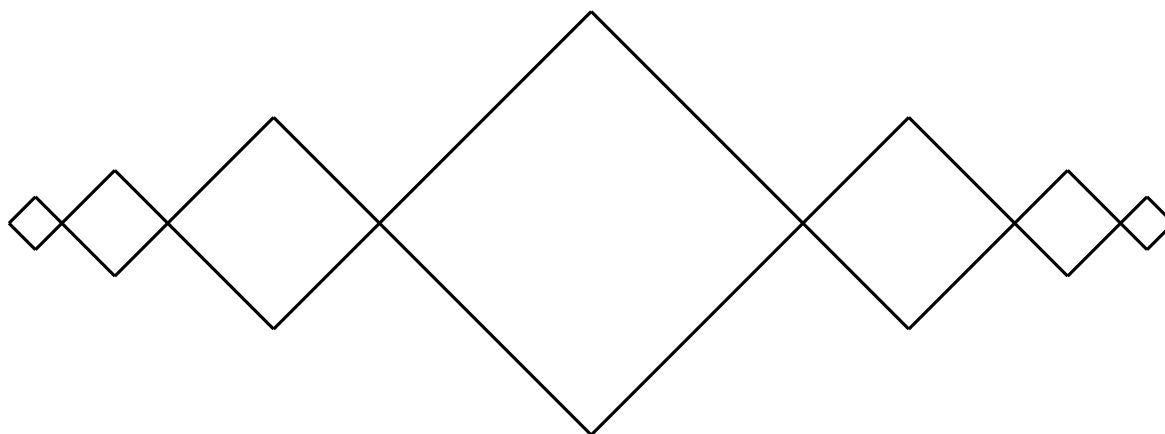
Dans ces éléments de solution, nous proposons, pour chaque problème, au moins une réponse dont la démarche est accessible aux élèves.

1 La Fresque

1.1 Le sujet

Dans la rue couverte du collège Géométrix, un groupe d'élèves a réalisé une fresque.

Ils ont d'abord imaginé un motif constitué d'un carré central et de part et d'autre de ce carré central, de trois autres carrés ayant chacun pour dimension la moitié de celui qui le précède.



Puis ils ont tracé le motif le plus long possible au centre d'un panneau rectangulaire blanc de 5 mètres de longueur par 3 mètres de hauteur de telle sorte que les axes de symétrie du rectangle blanc soient aussi axes de symétrie du motif.

Enfin, ils vont peindre leur motif avec deux couches de peinture et après enquête auprès de leurs camarades, ils décident de la peindre en noir.

L'intendant leur a donné un bon d'achat de 10 euros pour acheter la peinture de leur choix.

Au rayon bricolage de la grande surface la plus proche, ils réfléchissent . . .

1 L de peinture JOLITEINTE couvre 5m^2 et le pot de 0,5 L est vendu 3,90 euros.

1 L de peinture DECORPLUS couvre 6m^2 et le pot de 0,5 L est vendu 4,90 euros.

Quelle peinture vont-ils choisir ? Expliquez votre démarche.

1.2 Analyse a priori

Le problème consiste à optimiser les dimensions du motif, en respectant les conditions imposées. L'analyse de la configuration géométrique proposée est simple. Le choix du paramètre permettant de traduire les conditions métriques est laissé au choix de l'élève. Le passage d'un carré à l'autre est réalisé dans un rapport simple, mais attention au rapport des aires.

1.3 Éléments de solution

Soit L la longueur totale de la frise et d la longueur de la diagonale du plus petit carré, exprimées en centimètres.

$$L = 2d + 2 \times 2d + 2 \times 4d + 8d = 22d$$

$$8d \leq 300 \text{ et } L \leq 500 \quad \text{donc } d \leq \frac{500}{22}$$

La frise sera la plus longue possible en choisissant $d \approx 22,7$ cm.

Soit A l'aire totale de la frise et a l'aire du plus petit carré.

$$A = 2 \times a + 2 \times 4a + 2 \times 16a + 64a = 106a$$

Par découpage du carré selon une diagonale, on peut établir que $a = \frac{d^2}{2}$ donc $A = 53d^2$.

$$\text{Si } d \approx 22,7 \text{ cm, } A \approx 27376 \text{ cm}^2$$

Pour réaliser les deux couches, ils doivent donc disposer de suffisamment de peinture pour couvrir environ $5,5 \text{ m}^2$. Il leur faudrait donc 3 pots de peinture JOLITEINTE (à 3,90 €) ou 2 pots de peinture DECORPLUS (à 4,90 €). Mais ils ne peuvent pas dépenser plus de 10 euros.

Ils achèteront donc 2 pots de peinture DECORPLUS.

2 Retour du marché

2.1 Le sujet

Gaston, éleveur à Louhans, revient du marché à la volaille.

Il a vendu une centaine de jeunes poulets à 17 euros l'unité et a acheté des sacs de 10 kg de grain à 23 euros le sac. Il a ramené le maximum de sacs, sachant toutefois que sa vieille camionnette ne peut transporter une charge supérieure à 600 kg.

A son retour, il constate qu'il a réalisé un bénéfice de 310 euros.

Quel est le nombre de volailles vendues et le nombre de sacs de grains achetés ?

2.2 Analyse a priori

L'énoncé ne comportant que des valeurs numériques, l'élève peut aussi bien conduire un raisonnement purement arithmétique ou faire le choix d'algébriser le problème.

Le nombre de poulet n'est pas donné, donc on peut faire l'hypothèse que Gaston a tout vendu ou que le poids de ceux-ci est négligeable devant celui des sacs de maïs.

Il convient de déterminer des solutions entières d'une équation à deux inconnues, sachant que certaines conditions sont à réaliser.

L'utilisation de tableurs ou la représentation graphique, relativement à un repère adapté, d'une fonction affine permet de proposer des solutions au problème posé.

2.3 Éléments de solution

La vente d'un poulet rapporte 17 euros. La vente de x poulets rapporte donc $17x$ euros à Gaston. L'achat d'un sac de grains lui revient à 23 euros. L'achat de y sacs de grain lui revient donc à $23y$ euros.

Le bénéfice s'exprime donc par $17x - 23y$.
Il nous faut donc déterminer des entiers naturels x et y tels que :

1. $17x - 23y = 310$.
2. x proche de 100.
3. $y \leq 60$ puisque le poids des sacs ne peut pas excéder 600 kg.

Il nous reste à dresser un tableau de valeurs (calculatrice ou tableur) donnant les couples (x, y) avec, par exemple x variant entre 80 et 120.

Le tableau ci-contre fait apparaître les couples d'entiers (94; 56) et (117; 73). Le second n'est pas valable (le poids du grain excède 600 kg).

Nombre de poulets x	Nombre de sacs y
:	:
92	54,52173913
93	55,26086957
94	56
95	56,73913043
96	57,47826087
:	:
115	71,52173913
116	72,26086957
117	73
118	73,73913043
119	74,47826087

Conclusion : Gaston a vendu 94 poulets et a acheté 56 sacs de grain.

3 Quadratestadt

3.1 Le sujet

Le centre de la ville de Mannheim, en Allemagne, a été détruit par les bombardements alliés de 1945. Il a été reconstruit « au carré », c'est pourquoi Mannheim est surnommée « Quadratestadt » (ville carrée).

Les rues, régulièrement espacées, forment un réseau de carrés de 100 mètres de côté.

La signalisation urbaine indique les « blocks » ou pâtés de maisons (voir photo ci-contre et plan ci-dessous).



Chaque maison ou immeuble d'un block a une unique sortie.

D'autre part, pour la circulation automobile, les rues sont à sens unique, deux parallèles voisines étant orientées différemment (voir flèches sur le plan ci-dessous). Les cyclistes, quant à eux, peuvent rouler à contre-sens.

Selon le plan de circulation, un véhicule circulant du nord au sud ou inversement est prioritaire et un véhicule roulant de l'est à l'ouest ou de l'ouest à l'est aura un « stop » à chaque intersection.

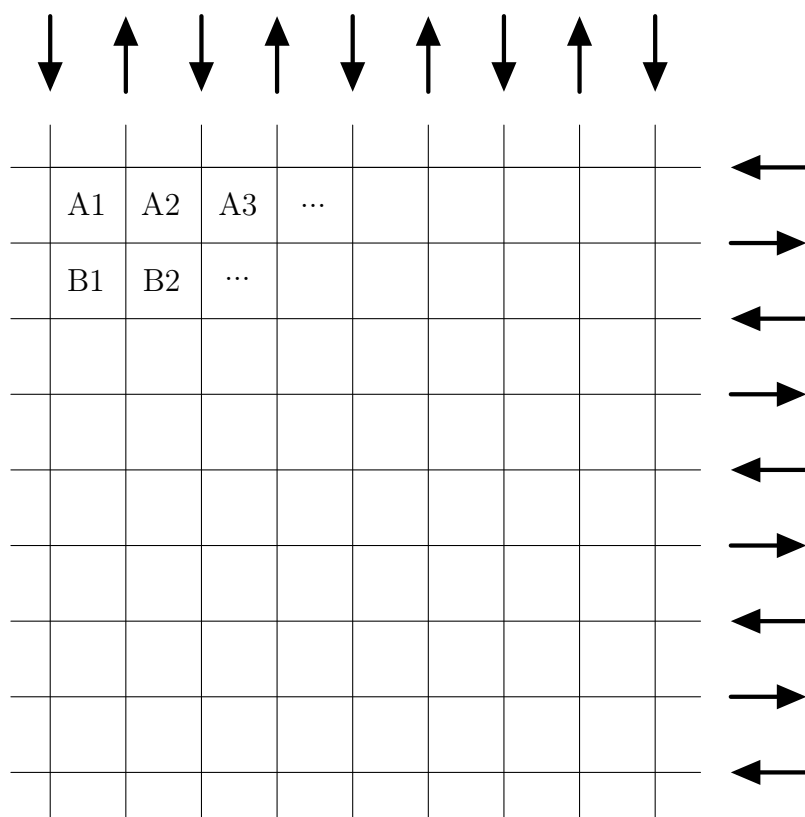
Nous admettons que :

- Un véhicule ne s'arrête que s'il a un stop. Le temps de traversée d'une rue est négligeable (considéré comme nul).
- Une voiture parcourt le côté d'un block en 8 secondes.
Chaque stop (arrêt, redémarrage) lui coûte 15 secondes.
- Un vélo parcourt le côté d'un block en 15 secondes.
Chaque stop (arrêt, redémarrage) lui coûte 5 secondes.

Karl possède un vélo et une voiture. Il doit se rendre d'une adresse située dans un des angles du block B3 à une adresse située dans un des angles du block F10.

Karl prend sa voiture et réalise le trajet en moins de trois minutes.

Déterminer le point de départ, le point d'arrivée et l'itinéraire choisi par Karl.
Pour le même trajet, aurait-il pu mettre moins de 3 minutes avec son vélo ?

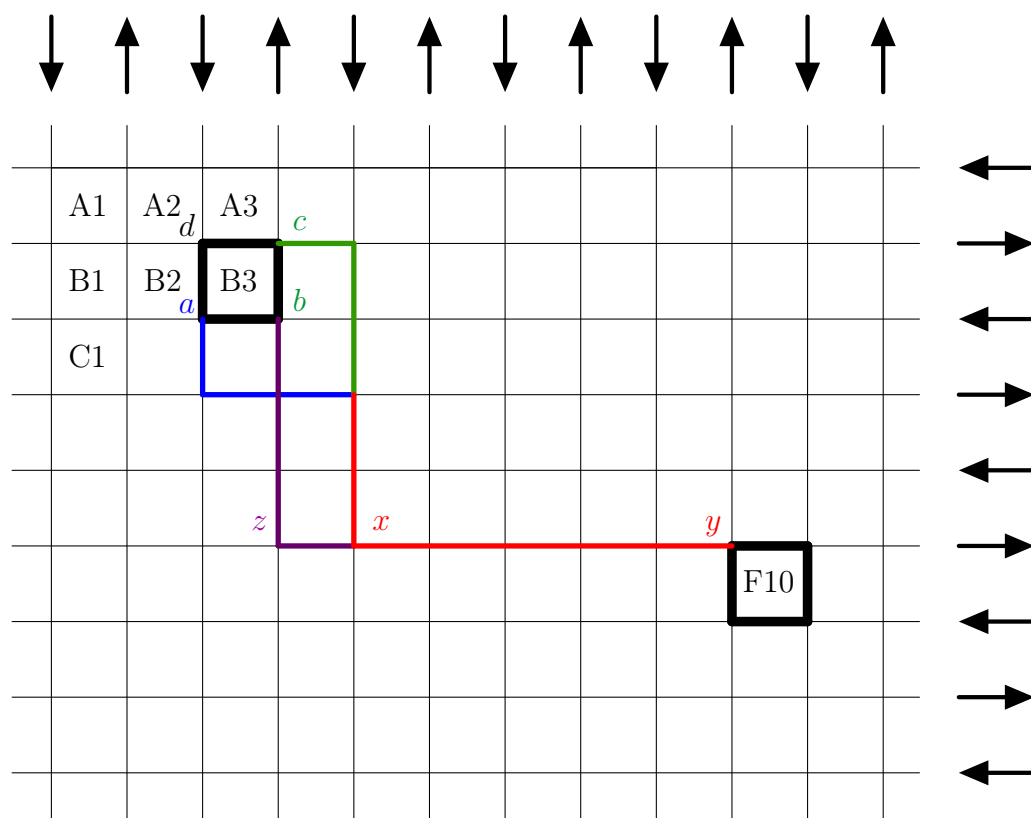


3.2 Analyse a priori

Aucune connaissance en algèbre ou géométrie n'est exigible dans cet exercice.

La difficulté principale de cet exercice est d'associer chaque question à la recherche du temps minimal de parcours et du temps maximal de parcours, selon les points de départ et d'arrivée du véhicule.

3.3 Éléments de solution



Pour un automobiliste, un trajet commençant en d sera plus long car il passera par a ou c .

De même, un trajet finissant dans un autre angle que y sera plus long.

Le temps de parcours du trajet $a-x-y$ sera de $10 \times 8 + 7 \times 15$, soit 185 secondes ou 3 minutes 5 secondes.

Le temps de parcours du trajet $c-x-y$ sera de $10 \times 8 + 7 \times 15$, soit 185 secondes ou 3 minutes 5 secondes (il y a un arrêt au départ car il traverse un axe prioritaire).

Le temps de parcours du trajet $b-c-x-y$ sera de $11 \times 8 + 6 \times 15$, soit 178 secondes ou 2 minutes 58 secondes (il n'y a pas d'arrêt au départ car il démarre sur un axe prioritaire).

Karl pourra ainsi faire le déplacement avec sa voiture en moins de 3 minutes.

Pour un cycliste, le trajet le plus court pour aller de b en y compte 9 blocks. En roulant vers le sud jusqu'en z , puis vers l'est jusqu'en y , il s'arrêtera 6 fois.

Son temps de parcours sera alors de $9 \times 15 + 6 \times 5 = 165$ secondes, soit 2 minutes et 45 secondes.

Karl aurait pu faire le même parcours plus rapidement avec son vélo.

4 Jeu

4.1 Le sujet

Victor et Hugo jouent au jeu suivant.

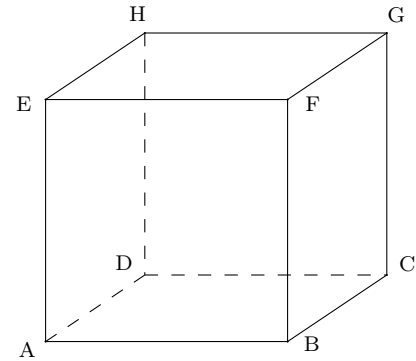
Ils ont noté sur des morceaux de papier identiques tous les segments d'extrémités deux sommets du cube ABCDEFGH. (par exemple, [AB], [BD], [AG] ...)

Tous ces morceaux de papier sont mis dans un sac non transparent.

Victor choisit un papier, note le segment indiqué, remet le papier dans le sac, puis Hugo fait de même.

Si les deux segments ont un unique point d'intersection, Victor gagne.

Si ce n'est pas le cas, Hugo gagne.



Le jeu est-il équitable ?

4.2 Analyse a priori

Cet exercice mobilise les connaissances en géométrie de l'espace et bien évidemment en calcul de probabilités.

Une bonne connaissance de l'objet de l'espace s'impose. Cela permettra à l'élève de dénombrer tous les segments en jeu et de les classer dans trois catégories : arêtes, diagonales de face et grandes diagonales.

Ce classement sera à l'origine de la disjonction de cas. Pour le dénombrement des cas favorables (à l'un ou l'autre des joueurs), un élève doit d'après la vue en perspective bien distinguer les segments non coplanaires et remarquer que les tirages de deux segments identiques (tirages avec remise) fournissent un cas défavorable à Victor.

4.3 Éléments de solution

Le cube contient 28 segments : 12 arêtes, 12 diagonales de face et 4 grandes diagonales.

Victor a 28 choix, Hugo également car il y a remise entre les deux tirages.

Il y a alors 28×28 , soit 784 résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

Ces résultats sont équiprobables puisque les tirages se font au hasard.

Nous allons recenser les cas favorables à Victor.

Cas 1 : Victor a choisi une arête telle [AB].

Il y a 12 choix de Hugo favorables à Victor dont :

- 2 arêtes issues de A et 2 arêtes issues de B.
- 3 diagonales de face issues de A et 3 diagonales de face issues de B.
- 1 grande diagonale issue de A et 1 grande diagonale issue de C.

Donc, si Victor choisit une arête, il y a 12×12 , soit 144 résultats favorables à Victor.

Cas 2 : Victor a choisi une diagonale de face telle [AC].

Il y a 13 choix de Hugo favorables à Victor dont :

- 3 arêtes issues de A et 3 arêtes issues de C.
- 2 diagonales de face issues de A, 2 diagonales de face issues de C et la diagonale [BD], sécante avec [AC].
- 1 grande diagonale issue de A et 1 grande diagonale issue de B.

Donc, si Victor choisit une diagonale de face, il y a 12×13 , soit 156 résultats favorables à Victor.

Cas 3 : Victor a choisi une grande diagonale telle [AG].

Il y a 15 choix de Hugo favorables à Victor dont :

- 3 arêtes issues de A et 3 arêtes issues de G.
- 3 diagonales de face issues de A et 3 diagonales de face issues de G.
- 3 grandes diagonales car les 4 grandes diagonales sont sécantes au centre du cube.

Donc, si Victor choisit une grande diagonale, il y a 4×15 , soit 60 résultats favorables à Victor.

Ainsi, le nombre de cas favorables à Victor s'élève à $144 + 156 + 60 = 360$.

Le nombre de cas favorable à Hugo est donc de $784 - 360$, soit 424.

La probabilité de victoire de Victor est de $\frac{360}{784}$, soit environ 0,46.

Conclusion : Le jeu n'est pas équitable ; il est légèrement défavorable à Victor.

5 Les pacifistes

5.1 Le sujet

Un commerçant regarde une manifestation de pacifistes défiler devant sa vitrine. Patients et disciplinés, ils marchent tous à la même vitesse.

Entre le premier et le dernier manifestant, sa montre indique qu'il s'est écoulé 1h12 minutes.

Son commerce reprend ensuite une activité normale. Le cortège emprunte ensuite un pont de 54 mètres de long que chaque manifestant traverse en 1 minute.

Plus tard alors que les derniers pacifistes s'engagent sur l'avenue Jules Viette, une voiture de la sécurité double le cortège prudemment et met 23 minutes pour doubler tous les manifestants.

A quelle vitesse roule cette voiture ?

5.2 Analyse a priori

La relation entre distance, vitesse et temps, bien connue des élèves, est à utiliser à trois reprises. Cependant, il convient de faire attention aux unités choisies, l'élève devant faire les conversions nécessaires.

5.3 Éléments de solution

Soit v la vitesse à laquelle se déplacent les pacifistes.

Chaque pacifiste met 1 minute pour parcourir 54 m donc sa vitesse vaut :

$$v = \frac{54 \text{ m}}{1 \text{ min}} = \frac{54 \text{ m} \times 60}{60 \text{ min}} = \frac{3240 \text{ m}}{1 \text{ h}} = 3,240 \text{ km/h}$$

A cette vitesse-là, un pacifiste qui marche durant 1h 12 minutes (c'est-à-dire : 72 minutes) parcourt la distance :

$$d = 3,240 \times \frac{72}{60} = 3,888 \text{ km} .$$

La distance qui sépare le premier du dernier manifestant est 3,888 km. C'est la longueur du cortège des manifestants.

Quand la voiture de la sécurité double les manifestants, elle met 23 minutes.

Durant ces 23 minutes, les manifestants continuent d'avancer à la vitesse de 54 mètres à la minute.

Ils parcourent $23 \times 54 = 1242 \text{ m} = 1,242 \text{ km}$.

La voiture de sécurité doit donc parcourir $3,888 + 1,242 = 5,130 \text{ km} = 5130 \text{ mètres}$ pour dépasser le cortège de manifestants.

Comme il lui faut 23 minutes pour faire ce dépassement, cela signifie qu'elle roule à :

$$\frac{5130 \text{ m}}{23 \text{ min}} = \frac{223,4 \text{ m}}{1 \text{ min}} = \frac{13382,6 \text{ m}}{60 \text{ min}} = \frac{13,3826 \text{ km}}{1 \text{ h}} \text{ soit } 13,4 \text{ km/h environ.}$$

La voiture de sécurité roule à une vitesse d'environ 13,4 km/h.

6 Tout en rond

6.1 Le sujet

Le contour d'une figure est composé de trois demi-cercles.

Le premier de diamètre [AB], le deuxième de diamètre [AM], le troisième de diamètre [MB], où M est un point du segment [AB], comme l'indique la figure ci-dessous.

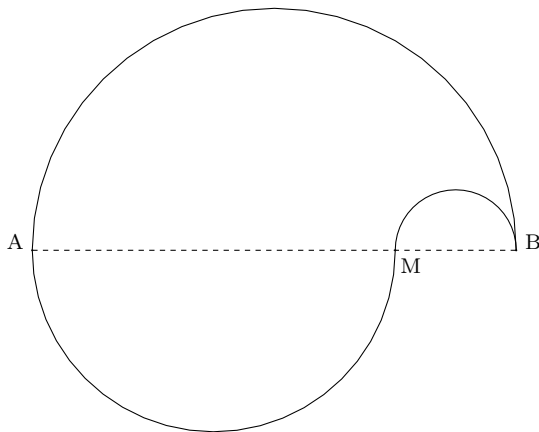


Figure de Julie

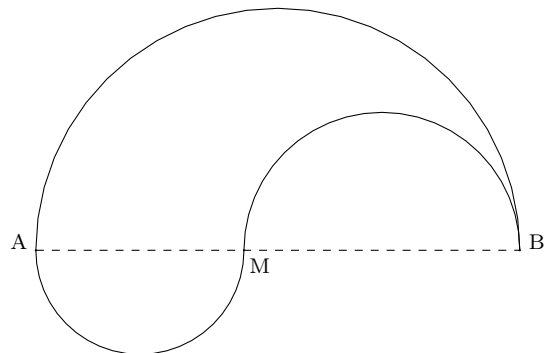


Figure de Guillaume

La figure de gauche a été réalisée par Julie et celle de droite a été réalisée par Guillaume. Dans les deux cas, le segment $[AB]$ a la même longueur.

Où Guillaume peut-il placer le point M pour que sa figure ait une aire trois fois plus petite que celle de Julie ?

Julie prétend que le périmètre de sa figure est plus long que celui de la figure de son ami.

Julie a-t-elle raison ?

6.2 Analyse a priori

La configuration proposée est composée de figures géométriques simples, pour laquelle le calcul d'aires et de périmètres est disponible dès la classe de sixième.

L'élève est amené à choisir une inconnue, la distance entre A et M paraît naturelle. Dans ce cas, le calcul de l'aire met en évidence une fonction linéaire.

Une autre configuration analogue aurait pu être proposée, par exemple à partir de carrés.

6.3 Éléments de solution

Question 1 :

L'aire d'un disque étant égale à $\pi \times \text{rayon}^2$, les calculs seront plus simples en utilisant les rayons plutôt que les diamètres.

Soit R le rayon du grand demi-cercle ($R = \frac{AB}{2}$) et x le rayon du demi-cercle de diamètre $[AM]$ pour la figure de Julie.

Comme $MB = AB - AM$, on a $MB = 2R - 2x$ et par conséquent, le rayon du cercle de diamètre $[MB]$ est égal à $\frac{(2R - 2x)}{2}$ soit $R - x$.

Nous pouvons écrire l'aire de la figure de Julie en fonction de R et de x :

$$\frac{\pi \times R^2}{2} + \frac{\pi \times x^2}{2} - \frac{\pi \times (R - x)^2}{2}$$

soit après avoir développé et mis au même dénominateur :

$$\frac{\pi \times R^2 + \pi \times x^2 - \pi \times (R^2 - 2Rx + x^2)}{2} = \frac{\pi R^2 + \pi x^2 - \pi R^2 + 2\pi Rx - \pi x^2}{2} = \frac{2\pi Rx}{2} = \pi Rx$$

La figure de Julie a comme aire πRx .

Soit y le rayon du demi-cercle de diamètre $[AM]$ pour la figure de Guillaume.

La figure de Guillaume a comme aire πRy .

Si l'on veut que l'aire de la figure de Guillaume soit trois fois plus petite que celle de Julie, il faut que $\pi Rx = 3\pi Ry$ et donc que $x = 3y$.

Guillaume devra placer son point M trois fois plus près de A que Julie.

Exemples de figures :

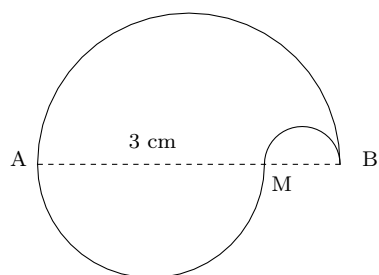


Figure de Julie

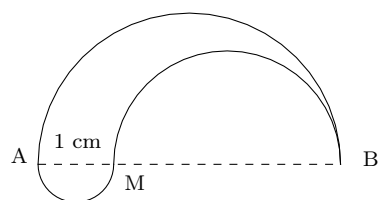


Figure de Guillaume

Il est possible aussi de donner une solution sans mesurer AM : il suffit de partager le diamètre [AB] en quatre segments de même longueur :

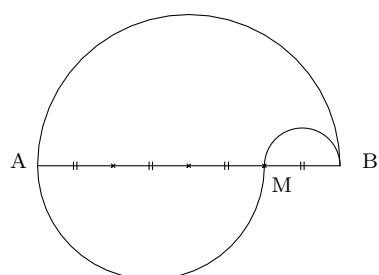


Figure de Julie

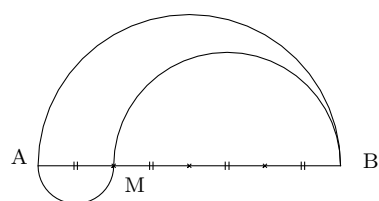


Figure de Guillaume

Question 2 :

Périmètre de la figure de Julie :

$$\frac{2\pi \times R}{2} + \frac{2\pi \times x}{2} + \frac{2\pi \times (R - x)}{2} = \pi R + \pi x + \pi R - \pi x = 2\pi R$$

Ce périmètre ne dépend pas de x , il sera le même pour Guillaume et pour toute position de M.

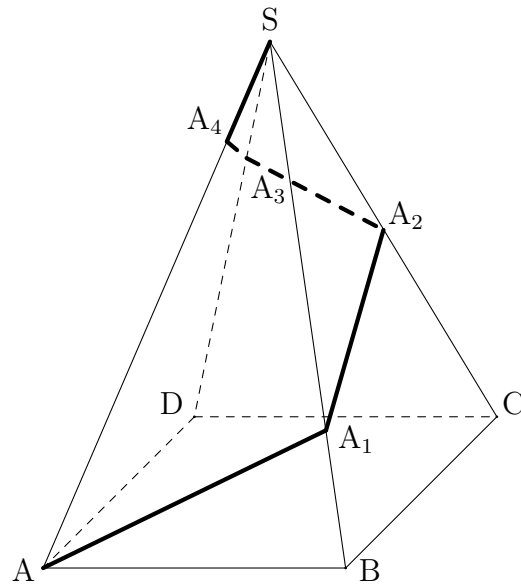
Julie a tort, les périmètres sont égaux.

7 La ligne noire

7.1 Le sujet

Un emballage cadeau a la forme d'une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un carré de 6 cm de côté et dont les arêtes latérales mesurent 12 cm.

On note α la mesure de l'angle \widehat{ASB} .



Cette boîte blanche est simplement décorée d'une ligne noire formée de cinq segments tracés de la manière suivante :

- $A_1 \in [SB]$ tel que le triangle ABA_1 soit une réduction du triangle SAB .
Sur la face SAB , la ligne noire $[AA_1]$ forme un angle α avec la base $[AB]$.
- $A_2 \in [SC]$.
Sur la face SBC , la ligne noire $[A_1A_2]$ forme un angle α avec la base $[BC]$.
- $A_3 \in [SD]$.
Sur la face SCD , la ligne noire $[A_2A_3]$ forme un angle α avec la base $[CD]$.
- $A_4 \in [SA]$.
Sur la face SDA , la ligne noire $[A_3A_4]$ forme un angle α avec la base $[DA]$.
- Le dernier segment de cette ligne noire est le segment $[SA_4]$.

Quelle est la longueur de cette ligne noire ?

7.2 Analyse a priori

Cet exercice a pour objectif de faire des calculs de longueurs sur un solide de l'espace.

Après avoir observé que la pyramide est constituée de faces latérales triangulaires et isocèles en S , le problème peut être ramené à des calculs de longueurs dans le plan.

La présence d'un angle peut engager la réflexion dans la direction de la trigonométrie mais aucun triangle n'est rectangle. Cette piste conduit à une impasse.

La construction d'un patron à l'échelle peut aider à analyser le problème et même permettre de repérer la longueur de la ligne noire.

La régularité de la pyramide permet de rapporter le problème à un calcul de distances dans le plan et le théorème de Thalès peut alors s'appliquer.

7.3 Éléments de solution

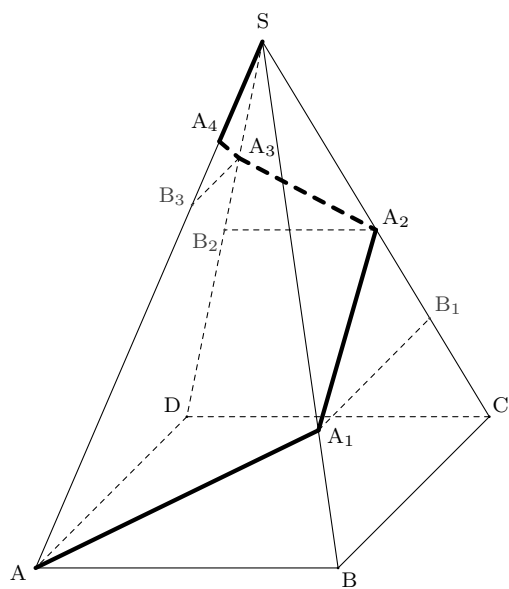


Figure 1

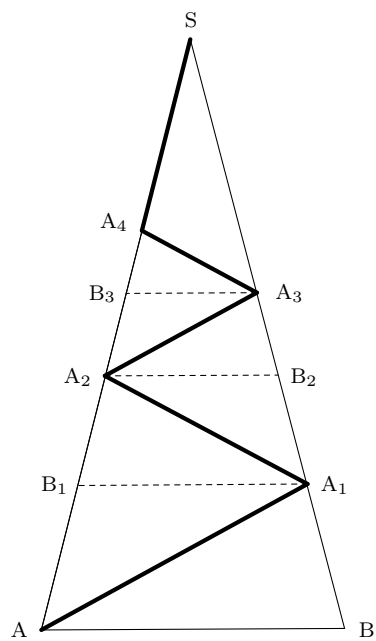


Figure 2

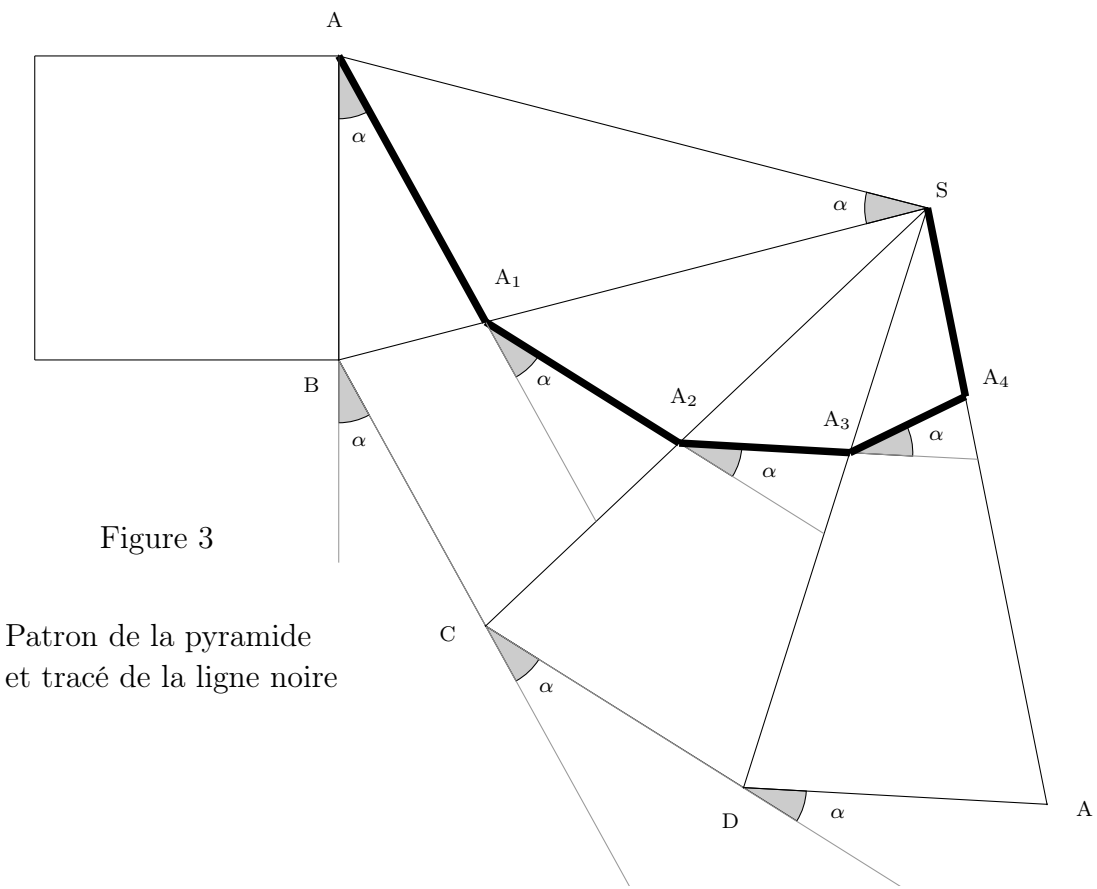


Figure 3

Patron de la pyramide
et tracé de la ligne noire

Tous les triangles $A_i B_i A_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq 3$ avec $A_0 = A$ et $B_0 = B$, sont des réductions successives du triangle initial SAB isocèle en S dont la base mesure la moitié du côté. Ils sont donc de même nature et de mêmes proportions que le triangle initial.

De plus, les segments de la ligne noire de la figure 1 pourraient tout aussi bien être tracés sur la seule face SAB comme le montre la figure 2 ou la figure 3.

Déterminer la longueur du trajet total consiste donc à ajouter les longueurs des segments $[A_i A_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq 3$, A_0 correspondant au point A .

- Calcul de AA_1 :

ABA_1 est isocèle en A et $AB = 6$ cm, donc $AA_1 = 6$ cm.

- Calcul de $A_1 A_2$:

Le triangle ABA_1 est une réduction de SAB ,
donc $BA_1 = \frac{1}{2}AB = 3$ cm.

L'application du théorème de Thalès
dans le triangle SAB , dans lequel $B_1 \in [SA]$ et
 $A_1 \in [SB]$ et $(A_1 B_1)$ parallèle à (AB) donne :

$$\frac{SA_1}{SB} = \frac{A_1 B_1}{AB} \text{ c'est à dire } \frac{12 - 3}{12} = \frac{A_1 B_1}{6}$$

et ainsi $A_1 B_1 = 4,5$ cm.

Comme $A_1 B_1 A_2$ est isocèle en A_1 ,
on en déduit que $A_1 A_2 = 4,5$ cm.

- Calcul de $A_2 A_3$:

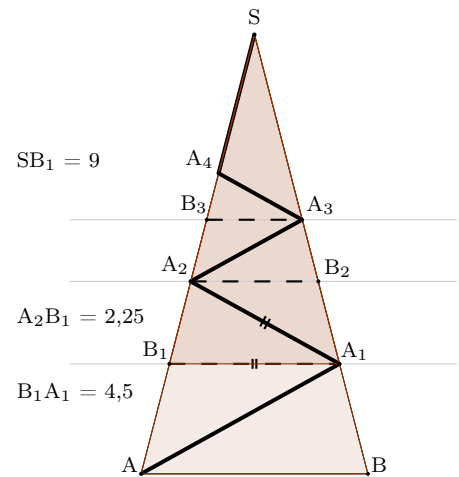
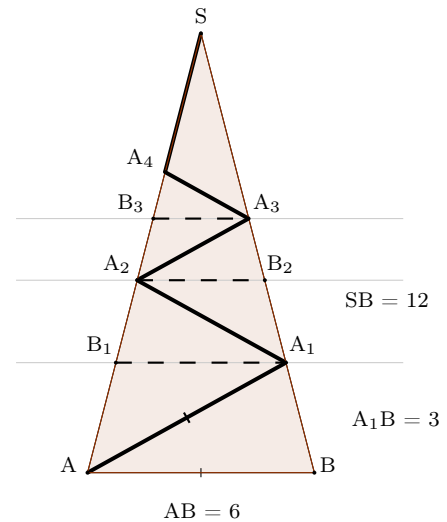
Le triangle $B_1 A_1 A_2$ est une réduction de SAB ,
donc $B_1 A_2 = \frac{1}{2}A_1 B_1 = 2,25$ cm.

L'application du théorème de Thalès
dans le triangle $SA_1 B_1$, dans lequel $B_2 \in [SA_1]$ et
 $A_2 \in [SB_1]$ et $(A_2 B_2)$ parallèle à $(A_1 B_1)$ donne :

$$\frac{SA_2}{SB_1} = \frac{A_2 B_2}{A_1 B_1} \text{ c'est à dire } \frac{9 - 2,25}{9} = \frac{A_2 B_2}{4,5}$$

et ainsi $A_2 B_2 = 3,375$ cm.

Comme $A_2 B_2 A_3$ est isocèle en A_2 ,
on en déduit que $A_2 A_3 = 3,375$ cm.



- Calcul de A_3A_4 :

Le triangle $B_2A_2A_3$ est une réduction de SAB ,

donc $B_2A_3 = \frac{1}{2}A_2B_2 = 1,6875$ cm.

L'application du théorème de Thalès

dans le triangle SA_2B_2 , dans lequel $B_3 \in [SA_2]$ et

$A_3 \in [SB_2]$ et (A_3B_3) parallèle à (A_2B_2) donne :

$$\frac{SA_3}{SB_2} = \frac{A_3B_3}{A_2B_2} \text{ c'est à dire } \frac{6,75 - 1,6875}{6,75} = \frac{A_3B_3}{3,375}$$

et ainsi $A_3B_3 = 2,53125$ cm.

Comme $A_3B_3A_4$ est isocèle en A_3 ,

on en déduit que $A_3A_4 = 2,53125$ cm.

- Calcul de A_4S :

Le triangle $B_3A_3A_4$ est une réduction de SAB ,

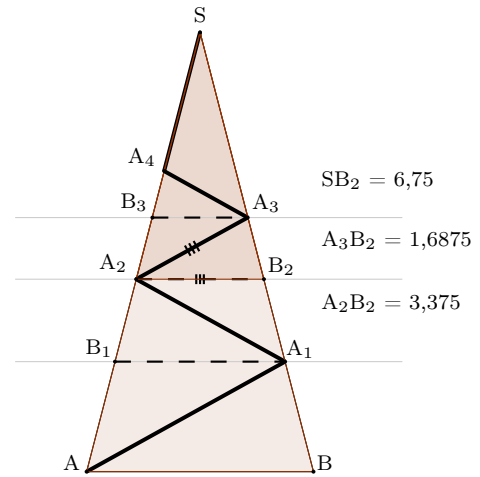
donc $B_3A_4 = \frac{1}{2}A_3B_3 = 1,26563$ cm.

et $SA_4 = 5,0625 - 1,265625 = 3,79687$ cm.

La longueur de la ligne noire est :

$$AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + SA_4 = 6 + 4,5 + 3,375 + 2,53125 + 3,79687 = 20,20312 \text{ cm.}$$

Conclusion : La longueur de la ligne noire est de 20,20312 cm.



7.4 Prolongement possible de l'activité

Il s'agirait de poursuivre la construction des points A_i indéfiniment et se demander si l'on peut atteindre le sommet S .

Les segments $[A_iA_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq 3$, étant construits selon le même algorithme, il vient donc naturellement à l'esprit de faire appel à un outil comme Algobox pour réaliser le calcul de la longueur de la ligne noire.

Le principe en est le suivant :

- C'est la variable l qui, à chaque étape reçoit la longueur de ce segment $[A_iA_{i+1}]$.
- s est la somme des longueurs des segments $[A_iA_{i+1}]$ réalisés, le premier étant $[AA_1]$.
- b est la longueur des côtés SB_i des triangles. La première valeur prise par b est 12. Le point B de départ pourrait être nommé B_0 .
- x est la longueur des côtés $[B_iA_{i+1}]$. La première valeur prise par x est BA_1 .
- y est la longueur du segment $[A_iB_i]$. La première valeur prise par y est $AB = 6$. A chaque étape, la valeur de y est déterminée à l'aide du théorème de Thalès.
- Le triangle $B_iA_iA_{i+1}$ étant isocèle en A_i , l prend la valeur du dernier y calculé.

En toute logique, on demande à l'algorithme de calculer ce trajet tant que la variable l est non nulle (ce qui correspondrait à notre arrivée en S . Seulement, cela ne se produit pas ! l tend vers 0!!!

On modifie donc l'algorithme pour lui demande de répéter le calcul tant que $l > 0,01$.

```

1  VARIABLES
2    s EST_DU_TYPE NOMBRE
3    b EST_DU_TYPE NOMBRE
4    x EST_DU_TYPE NOMBRE
5    y EST_DU_TYPE NOMBRE
6    l EST_DU_TYPE NOMBRE
7  DEBUT_ALGORITHME
8    s PREND_LA_VALEUR 0
9    b PREND_LA_VALEUR 12
10   x PREND_LA_VALEUR 0
11   y PREND_LA_VALEUR 6
12   l PREND_LA_VALEUR y
13   TANT_QUE (l>0.01) FAIRE
14     DEBUT_TANT_QUE
15       l PREND_LA_VALEUR y
16       x PREND_LA_VALEUR y/2
17       y PREND_LA_VALEUR ((b-x)/b)*y
18       b PREND_LA_VALEUR b-x
19       s PREND_LA_VALEUR s+l
20     FIN_TANT_QUE
21   AFFICHER "La longueur totale est égale à "
22   AFFICHER s
23   AFFICHER " cm"
24 FIN_ALGORITHME

```

Le logiciel affiche pour longueur totale :

$$s = 23.975919 \text{ cm}$$

8 Le chat

8.1 Le sujet

Depuis plusieurs jours, Lucas a remarqué un chat abandonné qui erre dans son quartier.

Il a observé qu'en rentrant de l'école, il y a 4 chances sur 5 qu'il soit dans l'une des 8 maisons de son lotissement, sans aucune préférence pour l'une ou pour l'autre. Aujourd'hui, il a réussi à convaincre ses parents de l'adopter et il part à sa recherche.

Il est déjà allé dans 7 maisons sans le trouver.

Quelles chances a-t-il de le trouver dans la dernière maison du lotissement, en supposant que le chat n'est pas revenu dans l'une des maisons déjà visitées ?

8.2 Analyse a priori

C'est un exercice de probabilités conditionnelles mais, même si cette notion est hors programme en 3^e et en 2^{nde}, les élèves ont travaillé la notion d'expérience aléatoire et l'exercice entre dans ce cadre, même s'il est difficile.

En effet, ils savent donner la liste de toutes les issues d'une expérience aléatoire et en déduire la probabilité d'un événement. Il faut cependant qu'ils soient capables de bien distinguer les issues de l'univers sur lequel ils vont devoir calculer cette probabilité.

Ici, il faut qu'ils aient compris que si Lucas est déjà allé dans 7 maisons et qu'il sait que le chat ne s'y trouve pas, il ne reste plus, avant d'entrer dans la dernière maison, que deux issues qui ne sont pas équiprobables et dont il faut comparer les chances de se réaliser.

La représentation de la situation sous forme d'un arbre paraît assez naturelle mais reste délicate car les issues ne sont pas équiprobables.

La représentation sous forme d'un rectangle où les différentes issues seront représentées par des rectangles d'aires proportionnelles à leurs probabilités sera plus explicite, mais il n'est pas certain que les élèves pensent à l'utiliser.

8.3 Éléments de solution

8.3.1 Sans schéma

Il y a 4 chances sur 5 que le chat soit dans une des maisons du lotissement donc il y a 1 chance sur 5 qu'il soit en dehors du lotissement. Le chat n'a aucune préférence lorsqu'il choisit une des maisons du lotissement, donc il y a 1 chance sur 10 qu'il soit dans l'une des maisons du lotissement et 2 chances sur 10 qu'il soit en dehors du lotissement.

Le chat a donc 2 fois plus de chance d'être en dehors du lotissement que dans la maison n° i , avec i entier tel que $1 \leq i \leq 8$.

L'expérience aléatoire consiste à entrer dans une maison pour y chercher le chat.

Avant que Lucas ne commence à chercher le chat, il y a 9 issues possibles :

le chat est dans la maison n° i , avec une probabilité égale à $1/10$, et le chat est en dehors du lotissement avec une probabilité égale à $2/10$.

Mais comme il est déjà allé dans 7 maisons, il sait déjà que le chat ne s'y trouve pas, donc l'expérience aléatoire consiste alors à entrer dans la maison n° 8 et elle conduit à 2 issues possibles :

e_1 (le chat est dans la maison n° 8) ou e_2 (le chat est en dehors du lotissement).

Ces deux issues ne sont pas équiprobables car le chat a 2 fois plus de chance d'être en dehors du lotissement que dans la maison n° i .

On peut écrire : $p(e_2) = 2p(e_1)$.

Mais on sait que $p(e_2) + p(e_1) = 1$ donc $p(e_1) = \frac{1}{3}$.

Lucas a donc 1 chance sur 3 de trouver le chat dans la dernière maison.

8.3.2 Avec un schéma

Le partage du rectangle est tel qu'il y a 4 chances sur 5 que le chat soit dans l'une des 8 maisons du lotissement, sans aucune préférence pour l'une ou pour l'autre.

Maison n° 1	Maison n° 2	Maison n° 3	Maison n° 4	Hors lotissement
Maison n° 5	Maison n° 6	Maison n° 7	Maison n° 8	

Lucas est déjà entré dans 7 maisons et il sait que le chat n'y est pas (rectangles colorés).

En entrant dans la dernière maison, il y a alors deux issues possibles (univers non coloré) :

- Le chat est dans la dernière maison
- Le chat est en dehors du lotissement

Le schéma montre que le chat a deux fois plus de chance d'être à l'extérieur du lotissement que dans la dernière maison.

Lucas a donc 1 chance sur 3 de trouver le chat dans la dernière maison

8.3.3 Avec les formules de probabilités conditionnelles, pour les professeurs ...

On considère les événements suivants :

A_i : « le chat est dans la maison n° i », avec i entier tel que $1 \leq i \leq 8$.

B : « le chat n'est pas dans le lotissement ».

On sait que $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_8) = \frac{4}{5}$.

Les événements A_i sont incompatibles et équiprobables donc $p(A_i) = \frac{1}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$.

$$p_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7}}(A_8) = \frac{p(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7} \cap A_8)}{p(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7})}$$

Les événements A_i sont incompatibles, $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7} \cap A_8 = A_8$.

D'autre part $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_7}$.

Par conséquent,

$$p_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7}}(A_8) = \frac{p(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7} \cap A_8)}{p(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7})} = \frac{p(A_8)}{1 - p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_7)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}.$$

Lucas a donc 1 chance sur 3 de trouver le chat dans la dernière maison

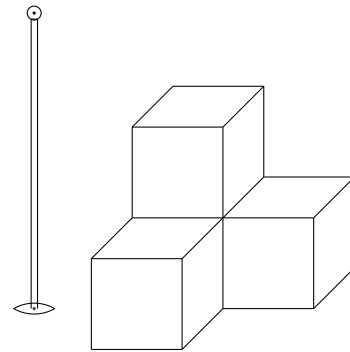
9 Le Tetra cube et son ombre

9.1 Le sujet

Un tétra cube, posé sur une table, est composé de quatre cubes de même dimension, comme l'indique le dessin en perspective cavalière ci-contre.

Un lampadaire, à source ponctuelle, posé sur la même table, éclaire cet objet.

Dessiner l'ombre du tétra cube sur cette table. Expliquer la méthode utilisée.



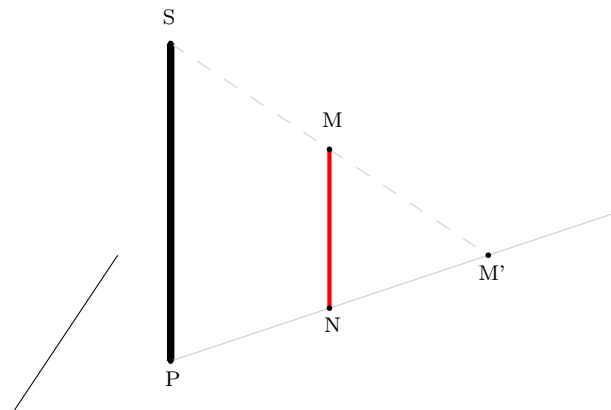
9.2 Analyse a priori

Il s'agit de connaître les propriétés d'un objet de l'espace et de la représentation en perspective cavalière classique.

La configuration, composée de trois cubes collés par au plus une face, est simple.

Le principe de base est représenté sur la figure ci-contre.

En effet, il convient de tracer une représentation de l'intersection de deux droites coplanaires de l'espace.



9.3 Éléments de solution

